

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = (\sqrt{5} - 1)^2 + 2\sqrt{5}$ este natural.
- 5p 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2 - x^2) = \log_2 x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, aceasta să aibă cel mult un element.
- 5p 5. Se consideră punctele A, B și C astfel încât $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$. Determinați lungimea segmentului $[AC]$.
- 5p 6. Se consideră numerele reale a și b astfel încât $a + b = \frac{\pi}{3}$. Arătați că $2 \cos b = \cos a + \sqrt{3} \sin a$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se notează cu $D(x, y)$ determinantul matricei $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & y & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- 5p a) Calculați $D(-1, 2)$.
- 5p b) Determinați numărul real q pentru care matricea $A(2, q)$ are rangul egal cu 2.
- 5p c) Arătați că există cel puțin o pereche (x, y) de numere reale, cu $x \neq y$, pentru care $D(x, y) = D(y, x)$.
2. Se notează cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile din $\mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + X - m$, unde m este un număr real.
- 5p a) Determinați m astfel încât restul împărțirii polinomului $f(X)$ la $X - 1$ să fie egal cu 8.
- 5p b) Arătați că numărul $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este întreg, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
- 5p c) În cazul $m = 2$ determinați patru numere întregi a, b, c, d , cu $a > 0$, astfel încât polinomul $g = aX^3 + bX^2 + cX + d$ să aibă rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.
- 5p a) Calculați $f'(0)$.
- 5p b) Arătați că, pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, ecuația $f(x) = n$ are exact o soluție în intervalul $(0, +\infty)$.
- 5p c) Fie x_n unica soluție din intervalul $(0, +\infty)$ a ecuației $f(x) = n$, unde n este număr natural, $n \geq 2$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ și se notează cu S suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$.
- 5p a) Calculați aria suprafeței S .
- 5p b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței S în jurul axei Ox .
- 5p c) Demonstrați că $\int_0^{2\pi} f^n(kx) dx = \int_0^{2\pi} f^n(x) dx$, pentru orice numere naturale $n, k \geq 1$.