

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 1$.
- 5p** 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2 - 2x - m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_2 12$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.
- 5p** 5. Calculați $\vec{a} \cdot \vec{b}$, știind că $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.
- 5p** 6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(0,1)$ și $C(3,1)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Calculați suma elementelor matricei A .
- 5p** b) Determinați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.
- 5p** c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(2n+1, n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați valorile numărului natural n , $n \geq 2$ pentru care aria triunghiului OA_nA_{n+2} este egală cu $n^2 - 3$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + ay + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Pentru $a = 1$ calculați $2011 \circ 2012$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „ $\circ$ ” este asociativă.
- 5p** c) Pentru $a = -1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x \circ 2^x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3}{2}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0, +\infty)$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x+n)e^x$.
- 5p** a) Calculați $\int_0^1 f_1(x) dx$.
- 5p** b) Arătați că funcția f_{2011} este o primitivă a funcției f_{2012} .
- 5p** c) Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x) dx \geq \frac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n , folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x+1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.