

Examenul de bacalaureat național 2015

**Proba E. c)
Matematică M_șt-nat**

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 1 + i$. Arătați că $z^2 - 2i = 0$.
- 5p 2. Calculați $(g \circ f)(3)$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2015$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-5x} = 5^{3-3x}$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu patru elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0, 4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x + 7$.
- 5p 6. Determinați aria triunghiului MNP , știind că $MN = 12$, $MP = 3$ și $m(\sphericalangle M) = 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.
- 5p b) Determinați numerele reale a , pentru care $\det(A(a)) = 0$.
- 5p c) Arătați că $A(a)A(b) = A(a+b) + abI_2$, pentru orice numere reale a și b , unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX + 2$, unde m este număr real.
- 5p a) Arătați că $f(0) = 2$.
- 5p b) Determinați numărul real m , știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g = X^2 + X - 2$ este egal cu 0.
- 5p c) Demonstrați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -6$, pentru orice număr real m , unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.
- 5p a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.
- 5p b) Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.
- 5p c) Demonstrați că $e^x \geq x + 1$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 5$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 2x - 5) dx = \frac{1}{3}$.
- 5p b) Calculați $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.
- 5p c) Arătați că $\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{1}{4}$.