

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 2016$ și rația $r = 2$.
- 5p** 2. Determinați numărul real m , știind că punctul $A(1, 2)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 40\}$, acesta să conțină cifra 4.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$ și $B(4, 5)$. Determinați ecuația dreptei AB .
- 5p** 6. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$, arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = -2$.
- 5p** b) Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a , $a \neq -1$ și $a \neq 1$.
- 5p** c) Determinați numerele întregi a , pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , iar x_0 , y_0 și z_0 sunt numere întregi.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.
- 5p** a) Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele reale a , pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_{\text{de } 2016 \text{ ori } a} = 3^{2015} - 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$.
- 5p** c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f'(2) + f'(3) + f'(4) + \dots + f'(n)) = -\frac{3}{2}$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 \sqrt{x} f(x) dx = \frac{5}{2}$.

- 5p** b) Arătați că $\int_1^{e^2} (f(x) - \sqrt{x}) \ln x \, dx = 4$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\pi \left(\ln a + \frac{7}{2} \right)$.