

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $a = \left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} \right)^2$ este întreg, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2 - 7x + m = 0$ sunt numere reale.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 36 de submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$. Determinați ecuația medianei din C a triunghiului ABC .
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ pentru care $\cos x \sin(\pi - x) - \sin x \cos(\pi + x) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ 3x + (2a-1)y + z = 1 \\ (a-3)x + ay + z = 2a-1 \end{cases}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -5$.
- 5p b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
- 5p c) Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 = y_0 z_0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5xy - 5(x+y) + 6$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = 5(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * x * x < 26$.
- 5p c) Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2} * \frac{1}{(n+1)^2} * \frac{1}{(n+2)^2} = -19$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = x$.
- 5p c) Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) dx = 12$.

5p b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)} dt = x$.