

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $(1+i)^2 - 2i = 0$, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Determinați numărul real nenul m , știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 + 8x - 7$ este egală cu 12.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 - 10x + 40) = 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, acesta să fie număr impar.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-2, 0)$ și $C(0, 3)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că $ABCD$ este paralelogram.
- 5p 6. Arătați că $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = \sqrt{3}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(M(1)) = 5$.
- 5p b) Demonstrați că $M(a)M(b) = M(a + b + 4ab)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a) = M(2)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5x + 5y - xy - 20$.
- 5p a) Arătați că $x * y = -(x - 5)(y - 5) + 5$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * x \geq x$.
- 5p c) Calculați $1 * (-2) * 3 * (-4) * \dots * (-2018) * 2019$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 9}{e^x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $0 \leq (x+3)(y+3) \leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x, y \in [-3, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (x+1) f(x) dx = 4$.
- 5p b) Arătați că funcția $F: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln(x+1)$ este o primitivă a funcției f .
- 5p c) Determinați numărul real a , $a > 1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^3} f(x)$, axa Ox , dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = a^2$ are aria egală cu $\ln 5$.