

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $n = (3 - i\sqrt{2})(3 + i\sqrt{2})$ este întreg, unde $i^2 = -1$.
- 5p 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(a, 3)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2019^x + 2019^{-x} = 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, -3)$ și $B(2, -2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe AB .
- 5p 6. Arătați că $\sin(a - b)\sin(a + b) = (\sin a - \sin b)(\sin a + \sin b)$, pentru orice numere reale a și b .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(a)) = 0$, pentru orice număr real a .
- 5p b) Demonstrați că $A(a)A(b) = 2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Demonstrați că matricea $B = A(\log_2 3) \cdot A(\log_3 4) \cdot A(\log_4 5) \cdot \dots \cdot A(\log_{15} 16)$ are toate elementele numere întregi.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + mX + n$, unde m și n sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $f(-1) - 2f(0) + f(1) = 2$, pentru orice numere reale m și n .
- 5p b) Determinați numerele reale m și n , știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2 - 1$.
- 5p c) Demonstrați că $3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 1$, pentru orice numere reale m și n , unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = x(2 - x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice $a \in (0, 4e^{-2})$, ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - \ln x) dx = \frac{7}{3}$.

- 5p** | **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g(x) = 2x - x^2 + f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$ are aria egală cu e^2 .
- 5p** | **c)** Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{e^{-1}}^1 x^n (f(x) - x^2) dx = 0$.