

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = 1$ .
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x - 1$ . Demonstrați că  $f(x) \geq g(x)$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 + 12} = 2x$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr  $x$  din mulțimea  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , acesta să fie soluție a ecuației  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .
- 5p 5. Determinați numerele reale  $a$  și  $b$ , pentru care  $\vec{u} = 3\vec{v}$ , unde  $\vec{u} = a\vec{i} + 6\vec{j}$  și  $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$ .
- 5p 6. Se consideră expresia  $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2$ , unde  $x$  este număr real. Arătați că  $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(x)) = 5$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p b) Determinați numărul natural  $n$  astfel încât  $A(-3) + A(-2) + A(-1) + A(1) + A(2) + A(3) = nA(0)$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = \frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$ .
- 5p a) Arătați că  $0 * 1 = 1$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * x = 1$ .
- 5p c) Demonstrați că  $x * (-x) \leq 1$ , pentru orice număr real  $x$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{x^2 + 2x + 2}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$ .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ , ecuația  $f(x) = a$  are cel puțin o soluție.
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x + x$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 (f(x) - xe^x) dx = \frac{1}{2}$ .
- 5p b) Arătați că  $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e + 3}{2}$ .
- 5p c) Se consideră  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , primitiva funcției  $f$  pentru care  $F(1) = 0$ . Arătați că  $\int_0^1 F(x) dx = \frac{5-3e}{3}$ .