Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației $x^2-11x+m=0$ sunt numere reale.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7(7x)+\log_x 7=3$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$, $B(-4,4)$ și $C(-4,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2-a\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(3)\cdot X=A(5)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-3x-3y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x=14$

5p **c)** Determinaţi numărul natural n, știind că $\left(2^n+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+1}+\frac{3}{2}\right)*\left(2^{n+2}+\frac{3}{2}\right)=2^{20}+\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-2\left(3x^2-3x+1\right)}{x^3(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(0,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{f(x)}dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}dt=x$.