Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2+x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=2x+2$. Demonstrați că $f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=g\left(x\right)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2-2x-1}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $M=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui M care au cel puțin trei elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB\parallel CD$ și $A\left(1,2\right)$, $B\left(4,5\right)$ și $D\left(-3,2\right)$. Determinați ecuația dreptei MN, știind că segmentul MN este linia mijlocie a trapezului $ABCD$.

5p **6.** Calculați $\sin 2x$, știind că $\left(2\sin x+\cos x\right)^2=2+3\sin^2 x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A\left(a\right)=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ a & i & a\\ -1 & a & -1\end{pmatrix}$, unde $i^2=-1$ și a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A\left(0\right)\right)=i$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A\left(a\right)$ este inversabilă.

5p **c)** Calculaţi $\underbrace{A\left(0\right)\cdot A\left(0\right)\cdot A\left(0\right)\cdot\ldots\cdot A\left(0\right)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+12$.

5p **a)** Arătați că $x*1=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $0*x=-9$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $x*y=3$, atunci $\left(x-1\right)\left(y-1\right)=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2-\ln\left(x^2+1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'\left(x\right)=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este tangentă graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f\left(x\right)=n$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e \frac{f\left(x\right)}{e^x}dx=1$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 x^3 f\left(x^2\right)dx = \frac{e\left(e-1\right)\left(e^2+e+1\right)}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_1^e f\left(x\right)dx + \int_1^e e^x \ln x\, dx = e^e$.