Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)+\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=0\Leftrightarrow\log_2\left(\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\right)=0$	**3p**
	Cum $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1=1$, obţinem că $\log_2\left(\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\right)=0$	**2p**
2.	$f(x)+f(-x)=2020\Leftrightarrow 2x+a+2\cdot(-x)+a=2020$	**3p**
	$2a=2020$, deci $a=1010$	**2p**
3.	$3^x+\dfrac{3}{3^x}=4\Leftrightarrow 3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0\Leftrightarrow\left(3^x-1\right)\left(3^x-3\right)=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale cuprinse între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$ sunt 12 și 13, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{90}=\dfrac{1}{45}$	**1p**
5.	$A\dot{B}+2B\dot{D}+3D\dot{A}=\left(A\dot{B}+B\dot{D}+D\dot{A}\right)+B\dot{D}+2D\dot{A}=\dot{0}+B\dot{D}+D\dot{A}+D\dot{A}=B\dot{A}+D\dot{A}=$	**3p**
	$=-\left(A\dot{B}+A\dot{D}\right)=-A\dot{C}=C\dot{A}$	**2p**
6.	Considerăm ΔABC cu $AB=2$, $AC=3$ și $BC=4\Rightarrow\cos A=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\dfrac{1}{4}$	**3p**
	$\cos A<0$, deci unghiul A este obtuz	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-13\cdot(-1)=1$	**2p**
	$\det\left(A+I_2\right)=\begin{vmatrix}4 & 13\\ -1 & -3\end{vmatrix}=4\cdot(-3)-13\cdot(-1)=1$, deci $\det\left(A+I_2\right)=\det A$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-4 & -13\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
	$aI_2=I_2$, deci $a=1$	**2p**
c)	$\det\left(A+mI_2\right)=\begin{vmatrix}3+m & 13\\ -1 & -4+m\end{vmatrix}=m^2-m+1$, pentru orice număr natural m	**3p**
	$m^2-m+1=n^2-n+1\Leftrightarrow(m-n)(m+n-1)=0$ și, cum m și n sunt numere naturale, $m\neq n$, obținem $m+n=1$, deci perechile sunt $(1,0)$ și $(0,1)$	**2p**

2.a)	$x \circ \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{1 - x - \frac{1}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} =$	**2p**
	$= \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x$, pentru orice $x \in M$	**3p**
b)	$x \circ y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy} = \frac{yx}{1 - y - x + 2yx} =$	**2p**
	$= y \circ x$, pentru orice $x,\ y \in (0,1)$, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**3p**
c)	$f(x) \circ f(y) = \frac{f(x) f(y)}{1 - f(x) - f(y) + 2 f(x) f(y)} = \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{y}{y+1}}{1 - \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} + 2 \cdot \frac{xy}{(x+1)(y+1)}} =$	**3p**
	$= \frac{xy}{xy + x + y + 1 - xy - x - yx - y + 2xy} = \frac{xy}{xy+1} = f(xy)$, pentru orice $x,\ y \in (0,+\infty)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{\left(e^x + 1\right)e^x - \left(e^x + x\right)e^x}{e^{2x}} =$	**3p**
	$= \frac{\left(e^x + 1 - e^x - x\right)e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x},\ x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ are panta $f'(1) = 0$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f și panta ei este 0, deci tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ și asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f sunt paralele	**3p**
c)	$f'(x) = (1 - x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x - 2)e^{-x}$, deci $g(x) = (x - 2)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$g'(x) = (3 - x)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$, deci $g'(x) + g(x) = (3 - x)e^{-x} + (x - 2)e^{-x} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 \left(x^2 + 1\right) f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)\left(4x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 \left(4x^3 + 2x + 1\right)dx =$	**2p**
	$= \left(x^4 + x^2 + x\right)\Big\vert_0^1 = 1 + 1 + 1 - 0 = 3$	**3p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(4x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \left(2x^2 - \ln\left(x^2 + 1\right) + \operatorname{arctg} x\right)\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 2 - \ln 2 + \operatorname{arctg} 1 - 0 + \ln 1 - \operatorname{arctg} 0 = 2 - \ln 2 + \frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x - 1}{x^2 + 1}\right)\ln x\,dx = \int_1^e 4x \ln x\,dx = 2x^2 \ln x\Big\vert_1^e - \int_1^e 2x\,dx = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$	**2p**
	$e^2 + 1 = e^2 + a$, deci $a = 1$	**3p**