Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\left(\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)^2$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $(f\circ f)(1)+f(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x+4^{1-x}=4$.

5p **4.** Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{0,5,7\}$.

5p **5.** Se consideră punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul M, mijlocul segmentului AG. Demonstrați că $6\vec{AM}=\vec{AB}+\vec{AC}$.

5p **6.** Calculați măsura unghiului A al triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $4\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ a+4 & a+3 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-15$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care rangul matricei $A(a)$ **nu** este egal cu 3.

5p **c)** Demonstrați că matricea $M=A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)\cdot A(-1)$ are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+2020}$.

5p **a)** Arătați că $x*(-x)=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{2021}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+9x+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_{-4}^{1} f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, f(\sin x)dx = 6-2\sqrt{5}$.