Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi termenul a_2 al unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1+2a_2+a_3=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+6$. Arătați că numărul $f(3)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ este natural.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(4-x)=3-\log_5(24-x)$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 45 submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}-\vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari.

5p **6.** Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6, respectiv 8. Determinați raza cercului înscris în acest triunghi.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}5-a & 10\\ -2 & -4-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A(a)\cdot A(a)=A(0)$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1)\cdot X=A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3x-2y+1$.

5p **a)** Arătați că $5*8=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $2020^x*2020^x=2$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=0$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ sunt paralele.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\ln(2x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-2\ln(2x+1)\right)dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Dacă F este o primitivă a funcției f, arătați că $F(\pi)\leq F\left(\frac{16}{5}\right)$.