Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\sqrt{11}-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ și $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. Demonstrați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+2^x=\dfrac{3}{4}$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-1,2)$. Determinați ecuația dreptei AD, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=10$ și $AC=5$. Arătați că $\sin C=2\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=-1\\ -2x-3y=1\\ 2x+4y+az=-2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a+2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, determinați inversa matricei $A(a)$.

5p **c)** Pentru $a\neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+2)(y+2)-2$.

5p **a)** Arătați că $x*(-2)=-2$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x-10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=23$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^2(x+1)f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, astfel încât $\displaystyle\int_1^a f(x)\,dx=\frac{1}{2}-\ln\frac{a+1}{2}$.