Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = 4-9+12i = -5+12i =$	**3p**
	$= 5i^2+12i = i(5i+12)$	**2p**
2.	$(f \circ f)(x) = x+a+a = x+2a$, $f(x+1) = x+1+a$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x+2a = x+1+a \Rightarrow a = 1$	**2p**
3.	$5 \cdot 2 \cdot 2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x \Leftrightarrow 10 \cdot 6^x = 12 \cdot 5^x$	**3p**
	$\left(\frac{6}{5}\right)^x = \frac{6}{5}$, deci $x = 1$	**2p**
4.	$f(1)$ poate fi aleasă în două moduri, iar $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în câte patru moduri	**3p**
	Există $4^2 \cdot 2 = 32$ de funcții $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ astfel încât $f(1) \geq 3$	**2p**
5.	$m_{AC} = -1$	**2p**
	Cum $BD \perp AC$, obținem $m_{BD} = 1$	**3p**
6.	$\cos 2x \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \cos 2x \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0$ și, cum $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, deci $x = \frac{\pi}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{vmatrix} = 2^x \cdot 3^x - 0 \cdot 0 =$	**3p**
	$= (2 \cdot 3)^x = 6^x$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2^x = 3^x$, de unde obținem $x = 0$	**2p**
c)	$X \cdot X \cdot X = A(1) \cdot X$ și $X \cdot X \cdot X = X \cdot A(1) \Rightarrow A(1) \cdot X = X \cdot A(1)$, deci, pentru $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde a, b, c și d sunt numere reale, obținem $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 0$ și $c = 0$	**3p**
	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ și $d \in \{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$, deci orice matrice X, pentru care $X \cdot X = A(1)$, are două elemente numere iraționale	**2p**

2.a)	$x \circ x = x^2 + x \cdot x + x^2 =$	**3p**
	$= 3x^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$x^2 + xa + a^2 = x^2 + xb + b^2 \Leftrightarrow x(a-b) + (a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x+a+b) = 0$	**3p**
	Cum $a \neq b$, obținem $x = -a - b$	**2p**
c)	$x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$	**3p**
	$(x+1)^3 = 0$, de unde obținem $x = -1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} =$	**3p**
	$= 2 - \ln(x+1) - 1 = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e - 1$	**2p**
	Pentru orice $x \in (-1, e-1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1, e-1]$ și pentru orice $x \in [e-1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e-1, +\infty)$	**3p**
c)	$f''(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
	Cum, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1} < 0$, obținem $f''(x) < 0$, deci f este concavă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x - e^x)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - e^x \right) \Big|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{3}{2} - e$	**2p**
b)	$\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x(x - e^x)\,dx = \int_0^1 (x^2 - xe^x)\,dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - (x-1)e^x \Big|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	**2p**
c)	$I_n = \int_0^1 x^n (x - f(x))\,dx = \int_0^1 x^n e^x\,dx = x^n e^x \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x\,dx =$	**3p**
	$= e - nI_{n-1}$, de unde obținem $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**