Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=1-3\sqrt{3}$ și rația $r=\sqrt{3}$. Arătați că partea fracționară a lui a_5 este egală cu $\sqrt{3}-1$.

5p **2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Arătați că numărul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$ este natural.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(5x-1)=2\log_3(x+1)$.

5p **4.** Determinați numărul de mulțimi X cu proprietatea $\{1,2,3\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că $2\vec{u}+3\vec{v}=\vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC=8\sqrt{2}$. Arătați că raza cercului înscris în ΔABC este egală cu $4\left(2-\sqrt{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a\\a^2&a^3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(2)+xI_2)=0$.

5p **c)** Arătați că, dacă $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$, atunci $a=b$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $0*8=4$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” **nu** are element neutru.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x\geq\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{10}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

5p **c)** Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ este o primitivă a funcției f.