Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5+2\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{3}-\left(4+2\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=5+2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}=1$, care este număr întreg	**2p**
2.	$2m+1=2m^2+2m\Leftrightarrow m^2=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	$m=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ sau $m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	**2p**
3.	$x^2+5x+1=2x+5\Rightarrow x^2+3x-4=0$	**3p**
	$x=-4$, care nu convine, sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $\lvert a+1\rvert\geq 2$ sunt 1, 2 și 3, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$	**2p**
	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$, deci $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$	**3p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}=2R$ și, cum $R=1$, obținem $BC=2\sin A$ și $AC=2\sin B$	**3p**
	$4\sin A\cdot\sin B=2\sin B\cdot 2\sin A=AC\cdot BC$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2,3)\right)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3-3=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b)\right)=\begin{vmatrix}a+1 & a-1\\ b & b-2\end{vmatrix}=(a+1)(b-2)-b(a-1)=2(b-a-1)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow b-a-1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow\det\left(A(a,b)\right)\neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	**2p**
c)	$A\left(-1,\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2\end{pmatrix}$, $\det\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)=2\sqrt{2}$, $\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)^{-1}\cdot A(0,0)$ și, cum $A(0,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, obținem $X=\begin{pmatrix}\dfrac{1-\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1\circ 4 = 5\cdot 1\cdot 4 + 1 + 4 =$ $= 20 + 5 = 25$	**2p** **3p**
b)	$x\circ 0 = 5x\cdot 0 + x + 0 = x$, pentru orice număr întreg x $0\circ x = 5\cdot 0\cdot x + 0 + x = x$, pentru orice număr întreg x, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**2p** **3p**
c)	$x \in \mathbb{Z}$ element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$” $\Leftrightarrow$ există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ x' = x'\circ x = 0 \Leftrightarrow 5xx' + x + x' = 0$, deci $x' = \dfrac{-x}{5x+1}$ și, cum $x, x' \in \mathbb{Z}$, obținem $5x+1 = -1$ sau $5x+1 = 1$ $x = -\dfrac{2}{5}$, care nu convine, sau $x = 0$, care convine	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{3x^2\left(x^2+1\right) - x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} =$ $= \dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^3+x} = 1$, deci panta dreptei d este 1 Tangenta la graficul lui f în $A(a, f(a))$ are panta 1, dacă $f'(a) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a^2\left(a^2+3\right)}{\left(a^2+1\right)^2} = 1$, de unde obținem $a^2 = 1$, deci $a = -1$ sau $a = 1$	**2p** **3p**
c)	$f''(x) = \dfrac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $x \in \mathbb{R}$ Cum $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[0, \sqrt{3}\right]$, obținem că funcția f este convexă pe $\left[0, \sqrt{3}\right]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^{\pi} \dfrac{f(x)}{e^x}dx = \int_0^{\pi} \dfrac{e^x\cos x}{e^x}dx = \int_0^{\pi} \cos x dx =$ $= \sin x\Big\vert_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx = e^x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\cos x)'dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx = -1 + e^x\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx =$ $= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x dx = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{e^{x+\frac{\pi}{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{e^x\cos x}dx = e^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{-\sin x}{\cos x}dx = e^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}} =$ $= e^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) - e^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos 0) = e^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1}{2} - e^{\frac{\pi}{2}}\ln 1 = -e^{\frac{\pi}{2}}\ln 2$	**3p** **2p**