Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele raționale a și b, știind că $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=a+b\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$. Arătați că $f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-4^{\frac{2x+3}{2}}=-7$.

5p **4.** Determinați numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $A(-1,3)$, $B(3,5)$ și $C(-4,-2)$. Determinați ecuația dreptei AD.

5p **6.** Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $\text{tg}\,2x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\2&-1&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=2\\y+3z=4\\2x-y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=18$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, astfel încât $a*x=a$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(2^x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x+2}\,dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{9}$.