Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 2$.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A\left(a, a^2\right)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 5x + 7} = x - 1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** Determinaţi numărul real m, pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătaţi că $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = 2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = 0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)M(y) = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (m,n) pentru care $M(m)M(n) = M(6)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy - x - y + 2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x \leq 5$.

5p **c)** Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - e\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstraţi că graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$.

5p **c)** Demonstraţi că ecuația $e^x - x^e = 0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x(x+2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = 18$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, știind că $\displaystyle\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)}\,dx = \frac{3\ln 2}{2}$.