Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră a un număr real. Arătați că numărul $z=(a+2i)^2+(a-2i)^2$ este real, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}$. Arătați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{\frac{x+1}{2}}=2\cdot 2^x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care sunt strict crescătoare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $ax+y-5=0$, unde a este număr real și $x-4y+3=0$. Determinați numărul real a pentru care cele două drepte sunt paralele.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+z=1\\y+z=2\\x+y=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că matricea $B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ este inversa matricei A.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $z_1\circ z_2=iz_1z_2+z_1+z_2$.

5p **a)** Arătați că $i\circ i=i$.

5p **b)** Demonstrați că $z_1\circ z_2=i(z_1-i)(z_2-i)+i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Demonstrați că simetricul numărului $\dfrac{1}{2}(1+i)$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr real.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-n\ln x+1$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{n(x^n-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^n}{x}=0$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție în intervalul $(0,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}\,dx$.

5p **c)** Arătați că $15\int_0^1 f^7(x)dx-14\int_0^1 f^6(x)dx=128$.