Examenul de bacalaureat naţional 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătați că $2z-z^2=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$, unde m este număr real. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m, știind că $f(x)>0$ pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(\sqrt{x}+1\right)+\log_5\left(\sqrt{x}-1\right)=2$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 32 de submulțimi.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ $B(2,5)$ și $C(6,1)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x-\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a&0&2-a\\0&2&0\\2-a&0&a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=8$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi p și q pentru care $A(p)A(q)=4I_3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-\frac{3}{5}xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln\left(x^2+1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcţia $f:(-5,5)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{25-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{74}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_{-3}^{3} |x f(x)| dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{1}{f^n(x)} dx$. Demonstraţi că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton.