Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_6^2 = b_5 b_7 \Rightarrow 36 = 3b_7$	**3p**
	$b_7 = 12$	**2p**
2.	$a^2 - 20 = a \Leftrightarrow a^2 - a - 20 = 0$	**3p**
	$a = -4$ sau $a = 5$	**2p**
3.	$5^x = 5^{-3x} \Leftrightarrow x = -3x \Leftrightarrow 4x = 0$	**3p**
	$x = 0$	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 5 moduri, deci sunt $5 \cdot 3 = 15$ numere impare de două cifre distincte, cu cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$	**3p**
5.	$AO = BO = CO$ și $O \in AC$, deci ΔABC este dreptunghic în B	**2p**
	Coordonatele ortocentrului triunghiului ABC sunt $x = 0$, $y = 1$	**3p**
6.	$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$	**2p**
	$\cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1) = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 =$	**3p**
	$= 1 - 1 = 0$	**2p**
b)	$M(x)M(y) = AA + yAB + xBA + xyBB$, $M(y)M(x) = AA + xAB + yBA + yxBB$	**2p**
	Cum $AB = A$ și $BA = B$, obținem $yA + xB = xA + yB \Leftrightarrow (x - y)A = (x - y)B \Leftrightarrow x = y$	**3p**
c)	$m^2 + 1 = n^2 \Leftrightarrow (n - m)(n + m) = 1$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, obținem $(m,n) = (0,-1)$ sau $(m,n) = (0,1)$	**3p**
2.a)	$x \circ y = 7xy + x + y + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} =$	**3p**
	$= 7x\left(y + \frac{1}{7}\right) + \left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7} = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$7\left(x + \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} = 5 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} \Leftrightarrow x + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}$ sau $x + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$	**3p**
	$x = -1$ sau $x = \frac{5}{7}$	**2p**

c)	De exemplu, $a=\frac{1}{7}$ și $b=\frac{3}{7}$	**2p**
	$a\circ b=7\left(a+\frac{1}{7}\right)\left(b+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}=7\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=1\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-2(x-1)}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-2x+2x-2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-x\Leftrightarrow f'(a)=-1$	**3p**
	$\frac{a-2}{a^2}=-1\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow a=-2$, care nu convine sau $a=1$, care convine	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,2)$	**2p**
	$0<1<\frac{\pi}{2}<2\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(1)$ și, cum $f(1)=0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$	**3p**
2.a)	$\int_1^e f'(x)dx=f(x)\Big\|_1^e=\ln x\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f^2(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^2 x\,dx=\frac{\ln^3 x}{3}\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}$	**2p**
c)	$\int_1^p xf(x)dx=\int_1^p x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\|_1^p-\int_1^p\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{p^2}{4}+\frac{1}{4}$	**3p**
	$\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{p^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}$ și, cum $p>1$, obținem $p=2$	**2p**