Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=3$ și $b_6=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-20$. Determinaţi numerele reale a, știind că $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x=\dfrac{1}{5^{3x}}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,1)$ şi $C(1,0)$. Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=A+xB$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x=y$.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $M\left(m^2+1\right)M\left(n^2\right)=M\left(n^2\right)M\left(m^2+1\right)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+7xy$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=7\left(x+\dfrac{1}{7}\right)\left(y+\dfrac{1}{7}\right)-\dfrac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=5$.

5p **c)** Dați exemplu de numere distincte $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care numărul $a\circ b$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-x$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e f'(x)\,dx=1$.

5p **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_1^e \frac{f^2(x)}{x}\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real p, $p>1$, știind că $\displaystyle\int_1^p x f(x)\,dx=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}$.