Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3-3i$ și $z_2 = 5-6i$. Arătați că $2z_1 - z_2 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x+15$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)+f(m+1)=35$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\cdot 3^x - 3^{x+1} + 27 = 0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 25.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,4)$, $B(-2,6)$. Determinați numerele reale a și b, știind că, dacă $C(a,b)$, atunci $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 4$. Știind că aria ΔABC este egală cu 6, calculați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & a+1 & a \\ a & 6 & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x+2y+z=3 \\ 2x+(a+1)y+az=3 \\ ax+6y+4z=a+3 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(a)) = (a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că **nu** există niciun număr real a pentru care $(A(4)-A(1))\cdot A(a) = A(a)\cdot(A(4)-A(1))$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul de ecuații are soluția unică (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

2. Pe mulțimea $M = (-10,10)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \dfrac{100(x+y)}{xy+100}$.

5p **a)** Arătați că $3 * 0 = 3$.

5p **b)** Se consideră $f:M\to(0,+\infty)$, $f(x) = \dfrac{10-x}{10+x}$. Demonstrați că $f(x*y) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in M$.

5p **c)** Determinați $x \in M$ pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{\text{de 11 ori } x} = 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(x^2-4x+1\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = e^x(x-3)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2020$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a, știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = a$ în exact trei puncte.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x}\big(f(x)-\ln x\big)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>e$, știind că $\displaystyle\int_{e}^{a}\ln x\,dx=2a$.