Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului real $x=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2-2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu dreapta de ecuație $y=2x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x-2}=\left(\frac{1}{4}\right)^{7-2x}$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A=\left\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\right\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(1,3\right)$, $B\left(2,5\right)$. Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Calculați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=2$, $AC=3$ și $m\left(\sphericalangle BAC\right)=60°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $A\left(a\right)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&a\\1&-a&0\end{pmatrix}$ și $\left(A\left(a\right)\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-a\\3&a&0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A\left(2\right)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional q, matricea $A\left(q\right)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră matricea $B\left(a\right)=A\left(a\right)-\left(A\left(a\right)\right)^t$. Determinați numerele raționale p pentru care $B\left(p\right)B\left(p\right)B\left(p\right)+5B\left(p\right)=O_3$.

2. Pe mulțimea $G=\left(0,1\right)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy}{2xy-x-y+1}$.

5p **a)** Arătați că $\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

5p **b)** Verificați dacă $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $\left(G,*\right)$ este grup, demonstrați că funcția $f:G\to M$, $f\left(x\right)=\frac{1}{x}-1$ este un izomorfism de la grupul $\left(G,*\right)$ la grupul $\left(M,\cdot\right)$, unde $M=\left(0,+\infty\right)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'\left(x\right)=1+\ln x$, $x\in\left(0,+\infty\right)$.

5p **b)** Determinaţi $m\in\left(0,+\infty\right)$ pentru care tangenta la graficul funcției f în punctul $M\left(m,f\left(m\right)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x$.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in\left(0,+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)\right)^n dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.