Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}<2$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2-4x+5$. Determinaţi produsul absciselor punctelor de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x-2}+3^{x+2}=91$.

5p **4.** Determinaţi termenul care **nu** îl conţine pe x din dezvoltarea $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^9$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,3)$ şi $C(3,2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei OG, ştiind că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=2$ şi $\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ a & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(1))=7$.

5p **b)** Demonstraţi că rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a.

5p **c)** Determinaţi numărul întreg m pentru care inversa matricei $A(m)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulţimea $M=(0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\frac{xy}{x+y}$.

5p **a)** Arătaţi că $2\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstraţi că $x\circ y\circ z=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$.

5p **c)** Demonstraţi că $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{10}=\frac{1}{54}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstraţi că funcţia f este bijectivă.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{6}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\ln x\,dx = \frac{e^2-7}{4}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, $a>1$ pentru care $\int_1^a f(x)e^x dx = e^a - 3e$.