

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianța 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_5 = 6$ și $b_6 = 18$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 4$. Determinați numerele reale m , știind că $f(m) = m$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $100 \cdot 10^{2x} = 10^{3x}$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ și $C(0, 4)$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .
- 5p 6. Arătați că $\sin 2x = 1$, știind că $\operatorname{tg} x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 3 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
- 5p b) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.
- 5p c) Se consideră numerele reale a , b și c , astfel încât $A(a) \cdot A(b) = A(c)$. Demonstrați că $a^2 + b^2 + 2c = 3$.
2. Pe mulțimea $M = [-1, 1]$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.
- 5p a) Arătați că $0 \circ 1 = 1$.
- 5p b) Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ x = 0$.
- 5p c) Demonstrați că $x \circ \sqrt{1-x^2} = 1$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x \ln x - 1$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x + \ln x + 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $e^x + x \ln x \geq \sqrt{e} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 2} dx = \frac{17}{6}$.
- 5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Se consideră funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$. Determinați $a \in (0, +\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x) dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.