Examenul naţional de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=3+4\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ este întreg.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=4x^2+2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+4x+2}=64\cdot 2^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\left\{-2,-1,1,3,4\right\}$, acesta să verifice inegalitatea $\sqrt{a^2-2a+1}\geq 3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $MNPQ$ cu $M\left(2,3\right)$, $N\left(5,4\right)$ și $P\left(4,0\right)$. Determinați ecuația dreptei MQ.

5p **6**. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\dfrac{AB\cdot AC\cdot BC}{1000}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A\left(a,b\right)=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(1,0\right)\right)=0$.

5p **b)** Demonstraţi că, dacă $a\in\left(-\infty,0\right)$ şi $b\in\left(0,+\infty\right)$, atunci matricea $A\left(a,b\right)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ pentru care $A\left(1,3\right)\cdot X=A\left(2,1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-\left(x+y\right)+\dfrac{2}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ\left(-1\right)=-\dfrac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1\circ\dfrac{1}{\sqrt{2}}\circ\dfrac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{\sqrt{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=2021$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x}dx = e(e-1)$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^{\pi}}}$.