**Examenul naţional de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 11**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1$ | **2p** |
| | Cum $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}=6-\sqrt{2}$, obținem că $\sqrt[3]{\left(6-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=6-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=5$ | **3p** |
| **2.** | $f(x)=0\Leftrightarrow x=3$, deci graficul funcției $f$ intersectează axa $Ox$ în punctul $(3,0)$ | **2p** |
| | $g(3)=0\Leftrightarrow 9-6m-6=0$, deci $m=\frac{1}{2}$ | **3p** |
| **3.** | $\log_2\left(x^2-4x+12\right)=3\Rightarrow x^2-4x+12=8\Rightarrow x^2-4x+4=0$ | **3p** |
| | $x=2$, care convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile | **2p** |
| | Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor divizibilă cu 3 sunt numerele naturale de două cifre care sunt divizibile cu 3, deci sunt 30 de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$ | **1p** |
| **5.** | $AB\perp BC\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$ | **2p** |
| | Cum $m_{AB}=1$ și $m_{BC}=\frac{m-3}{2}$, obținem $\frac{m-3}{2}=-1$, deci $m=1$ | **3p** |
| **6.** | $\sin\frac{25\pi}{6}=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ | **2p** |
| | Cum $\cos\frac{23\pi}{3}=\cos\left(6\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}$, obținem că $\sin\frac{25\pi}{6}+\cos\frac{23\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(-2,0,2)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(-2,0,2)\right)=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=-3+1+1-1-(-1)-3=-4$ | **3p** |
| **b)** | $\det\left(A(a,b,c)\right)=\begin{vmatrix}1+a&1&1\\1&1+b&1\\1&1&1+c\end{vmatrix}=(1+a)(1+b)(1+c)+1+1-(1+a)-(1+b)-(1+c)=$ | **2p** |
| | $=abc+ab+ac+bc\neq 0$, deci matricea $A(a,b,c)$ este inversabilă | **3p** |
| **c)** | Sistemul este compatibil nedeterminat, deci $\det\left(A(a,b,c)\right)=0\Rightarrow abc+ab+ac+bc=0$ | **3p** |
| | $ab+ac+bc=-abc\Rightarrow\frac{ab+ac+bc}{abc}=-1$, deci $N=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-1$, care este număr întreg | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $1*1=\dfrac{1\cdot 1}{1\cdot 1-1-1+2}=\dfrac{1}{1-1-1+2}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{1}{1}=1$ | **2p** |
| **b)** | $f(x)*f(y)=\dfrac{f(x)f(y)}{f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2}=\dfrac{\dfrac{2}{x+1}\cdot\dfrac{2}{y+1}}{\dfrac{2}{x+1}\cdot\dfrac{2}{y+1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{y+1}+2}=$ | **2p** |
| | $=\dfrac{4}{4-2(y+1)-2(x+1)+2(x+1)(y+1)}=\dfrac{4}{2xy+2}=\dfrac{2}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $f\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2020}{2021}\right)=\dfrac{2n}{n+1}\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2021}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$, unde $n$ este număr natural | **3p** |
| | $\dfrac{2}{\dfrac{1}{2021}+1}=\dfrac{2n}{n+1}\Leftrightarrow\dfrac{2\cdot 2021}{2022}=\dfrac{2n}{n+1}$, deci $n=2021$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=2\ln x-2x+2$, $x\in(0,+\infty)$ | **3p** |
| | $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$ | **2p** |
| **b)** | $f''(x)=\dfrac{2(1-x)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ | **2p** |
| | Cum $f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,1)$, obţinem că funcţia $f$ este convexă pe $(0,1)$ | **3p** |
| **c)** | $f''(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'$ strict descrescătoare pe $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)<f'(1)$, deci $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$ | **2p** |
| | $f$ continuă şi $f$ strict descrescătoare pe $(1,+\infty)\Rightarrow f(x)<f(1)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci $2x\ln x-x^2+3<2$, de unde obţinem $2\ln x<x-\dfrac{1}{x}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$ | **3p** |
| **2.a)** | $I_1+\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\int_0^1\dfrac{x}{1+x}dx+\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx=\int_0^1\left(\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1}{1+x}\right)dx=\int_0^1 1\,dx=$ | **3p** |
| | $=x\Big\vert_0^1=1$ | **2p** |
| **b)** | $I_2=2\int_0^1\dfrac{x^2}{1+x^2}dx=2\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{1+x^2}\right)dx=2\left(x-\operatorname{arctg}x\right)\Big\vert_0^1=$ | **3p** |
| | $=2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)=2-\dfrac{\pi}{2}$ | **2p** |
| **c)** | $I_n=n\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^n}dx=\int_0^1 x\cdot\left(\ln\left(1+x^n\right)\right)'dx\le\int_0^1\left(\ln\left(1+x^n\right)\right)'dx=$ | **3p** |
| | $=\ln\left(1+x^n\right)\Big\vert_0^1=\ln 2$, deci $I_n\le\ln 2$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **2p** |