Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_8 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=3$ și $b_6=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-3$. Arătați că $(f\circ f)(\sqrt{3})=\sqrt{3}$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2\lg x=\lg(5x+6)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităţilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(-1,-2)$ și $C(a,-2)$, unde a este număr real nenul, $a\neq -1$. Determinați numărul real a pentru care ortocentrul triunghiului ABC este O.

5p **6.** În triunghiul ABC, $AB=6$, $AC=3\sqrt{6}$ și $B=\frac{\pi}{3}$. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=3$.

5p **b)** Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg k pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=kA(1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=3xy-2x-2y+2$.

5p **a)** Arătați că numărul $\frac{1}{3}\circ\frac{1}{3}$ este întreg.

5p **b)** Arătați că $x\circ x\geq\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ x\circ x=e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 f^4(x)\,dx=21$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f\left(e^x\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)}dx = 2e^2$.