Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=(1+6i)^2+(3-2i)^2$ este întreg negativ, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax$, unde a este număr real astfel încât $f(1)=f(5)$. Arătați că $f(2)=f(4)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(2x^2-2\right)=2\log_3(x+1)$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu suma dintre cifra sutelor și cifra zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(-4,3)$ și C, astfel încât $AOBC$ este paralelogram. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$ pentru care $2\sin x\sin(\pi-x)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)A(1)=A(1)A(a)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ are rangul doi.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $\hat{3}\circ\hat{3}=\hat{3}$.

5p **b)** Arătați că $\hat{0}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{Z}_6\to\mathbb{Z}_6$, $f(x)=\hat{4}\circ x$ este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul funcției f intersectează axa Oy.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(4)+f(6)+\ldots+f(2n)\right)^n$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(x^2+4\right)f(x)\,dx=0$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt\geq 0$, pentru orice număr real x.