Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră un număr complex z care are proprietatea $z^2=1-i$. Arătați că $z^4+2i=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x)>1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x+2)+\log_5(2x-1)=2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă suma cifrelor divizibilă cu 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$ și $C(4,5)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$.

5p **6.** Determinați $x\in(0,1)$ pentru care $4\cos x\cos(\pi-x)+3=0$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=6$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B+B=B\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y, știind că $(x+1)A\cdot B+(y-2)B\cdot A=B\cdot B\cdot B$.

2. Pe mulțimea numerelor naturale nenule se definește legea de compoziție $x*y=x^y$.

5p **a)** Arătați că $2*4=4*2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” **nu** este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $(2*2)*n<64$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln\left(x^2+x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x\left|f(x)\right|dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.