Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=\frac{(2a_1+6r)\cdot 7}{2}=\frac{(2\cdot(-5)+6\cdot 8)\cdot 7}{2}=$	**3p**
	$=133$	**2p**
2.	$\Delta=1-4a(-a-1)=(2a+1)^2$	**2p**
	$\Delta>0\Rightarrow a\neq-\frac{1}{2}$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=x\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=3$	**2p**
4.	$5A_3^2-3C_5^3=5\cdot\frac{3!}{(3-2)!}-3\cdot\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}=$	**2p**
	$=5\cdot 6-3\cdot\frac{4\cdot 5}{2}=30-30=0$	**3p**
5.	$\frac{2}{5}=\frac{m}{-m^2-1}\Leftrightarrow 2m^2+5m+2=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=-\frac{1}{2}$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC\cdot\sin C}{2}\Rightarrow 15=\frac{6\cdot 10\cdot\sin C}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $AB>BC>AC$, unghiul C are măsura cea mai mare dintre unghiurile ΔABC, deci unghiul C are măsura de 150°	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=-1+1=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
	$M(a,b)\cdot M(x,y)=(aI_2+bA)(xI_2+yA)=axI_2+ayA+bxA+ybA\cdot A=axI_2+(ay+bx)A=$ $=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y	**3p**
c)	$B=xI_2+2yA+yI_2+2xA=M(x+y,2(x+y))$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Cum $C=M(2xy,\sqrt{2}(x+y))$, obținem că $x+y=2xy=0$, deci $x=y=0\Rightarrow x^2+y^2=0$	**3p**
2.a)	$(1*2)\circ(1*3)=(2+2+4+2)\circ(3+2+6+2)=10\circ 13=10+13+2=25$	**3p**
	$1*(2\circ 3)=1*(2+3+2)=1*7=7+2+14+2=25$, deci $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ 3)$	**2p**

b)	$x\circ(-2)=(-2)\circ x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-2$	**2p**
	$x*e=x*(-2)=-2x+2x+(-4)+2=-2=e$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$n*(-n)=2-n^2$, $n\circ(-n)=2$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$2-n^2\geq 2\Leftrightarrow n^2\leq 0$, deci $n=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(x-1+\sqrt{x^2-x+1}\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x\ln(x+1)\right)=0$ și $f(0)=0$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, de unde obținem că f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$ și $f''(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$	**2p**
c)	Dacă $a\in(-\infty,0)$, atunci panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este $f'(a)=1+\dfrac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}}$	**2p**
	Cum $f'(a)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-a+1}=1-2a\Leftrightarrow 4a^2-4a+4=4a^2-4a+1$, ceea ce este imposibil, obținem că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul A **nu** este paralelă cu axa Ox	**3p**
2.a)	$f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	**2p**
b)	$\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)dx=f(x)\Big|_{\frac{1}{4}}^{4}=f(4)-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{15}{4}+3=\dfrac{27}{4}$	**2p**
c)	$\int_{m}^{1} f^2(x)\cdot g(x)dx=\int_{m}^{1} f^2(x)\cdot f'(x)dx=\dfrac{1}{3}f^3(x)\Big|_{m}^{1}=\dfrac{1}{3}\left(f^3(1)-f^3(m)\right)$	**3p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(m)=0$, deci $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, care convine	**2p**