Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4^3}=4=$	**3p**
	$=2^2=\left(\log_3 9\right)^2\Rightarrow \sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$f(-x)=-f(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$g(-x)=\left(f(-x)\right)^2=\left(-f(x)\right)^2=\left(f(x)\right)^2=g(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția g este pară	**3p**
3.	$2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^x-2\cdot 2^x+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow 2^x\left(2^x-\sqrt{2}\right)-2\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0\Leftrightarrow\left(2^x-2\right)\left(2^x-\sqrt{2}\right)=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=\dfrac{1}{2}$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_{10}^k\left(x\sqrt{x}\right)^{10-k}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^k=C_{10}^k x^{\frac{3(10-k)}{2}-2k}=C_{10}^k x^{\frac{30-7k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,10\}$	**3p**
	$\dfrac{30-7k}{2}=8\Leftrightarrow k=2$, deci $T_3=C_{10}^2x^8$ îl conține pe x^8	**2p**
5.	$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, deci punctul M este mijlocul segmentului BC	**3p**
	$\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{CM}$, deci $k=-2$	**2p**
6.	$2\sin x\cos x+6\cos x-\sin x-3=0\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+3)-(\sin x+3)=0\Leftrightarrow(\sin x+3)(2\cos x-1)=0$	**2p**
	$\sin x+3\neq 0$, deci $\cos x=\dfrac{1}{2}$ și, cum $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\dfrac{\pi}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 4 & -1 & -1\end{vmatrix}=2+1+0-4-0-0=$	**3p**
	$=3-4=-1$	**2p**
b)	Cum $\begin{vmatrix}-1 & -1\\ m-1 & m\end{vmatrix}=-m+m-1=$	**3p**
	$=-1\neq 0$, deci matricea $M(m)$ are rangul cel puțin egal cu 2, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$M(m)\cdot A=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m+2 & -m-1 & 0\\ -m-2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$m=-2$, care convine	**2p**
2.a)	$(2+i)\circ(2-i)=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**

b)	$A=-1+(a+1)i-1+(a-1)i+\left(-1+(a+1)i\right)\left(-1+(a-1)i\right)=$	**2p**
	$=-2+2ai+1-(a-1)i-(a+1)i-\left(a^2-1\right)=-a^2<0$, pentru orice număr real nenul a	**3p**
c)	$2z+z^2=-5\Leftrightarrow z^2+2z+5=0$	**3p**
	$z=-1-2i$ sau $z=-1+2i$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\ln(x+1)-\ln(x+3)\right)'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=$	**3p**
	$=\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\ln\frac{x+1}{x+3}=-\infty$	**3p**
	Dreapta de ecuație $x=-1$ este asimptota verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^x=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+3}}=\ln e^{-2}=-2$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^xf(x)-2\right)dx=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$	**2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e\left(\ln^2x+1\right)\cdot\frac{1}{x}dx=\int_1^e\left(\ln^2x+1\right)\cdot(\ln x)'dx=\left(\frac{\ln^3x}{3}+\ln x\right)\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$f'(x)=-\frac{(x-1)^2}{e^x}\le0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare, de unde obținem că $f(1)\le f(x)\le f(0)$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$, $\frac{2}{e}\le f(x)\le1\Rightarrow\frac{2}{e}x^n\le x^nf(x)\le x^n$, deci $\frac{2}{e(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, de unde obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**