Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\sqrt[3]{4}$, $\log_3 9$ și $\sqrt[3]{16}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră o funcție impară $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)\right)^2$ este pară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}-\sqrt{2}\cdot 2^x=2^{x+1}-2\sqrt{2}$.

5p **4.** Determinați termenul care îl conține pe x^8 din dezvoltarea $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{10}$, unde $x\in(0,+\infty)$.

5p **5.** În planul triunghiului ABC se consideră punctul M, astfel încât $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Determinați numărul real k, știind că $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{CM}$.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+6\cos x-\sin x-3=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&-1&0\\4&-1&-1\end{pmatrix}$ și $M(m)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&m&1\\m-1&m&-m\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este cel puțin egal cu 2.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m\neq -1$, știind că inversa matricei $M(m)$ este matricea A.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1\circ z_2=z_1+z_2+z_1z_2$.

5p **a)** Arătați că $(2+i)\circ(2-i)=9$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, numărul $A=\left(-1+(a+1)i\right)\circ\left(-1+(a-1)i\right)$ este real strict mai mic decât 0.

5p **c)** Determinați numerele complexe z pentru care $z\circ z=-5$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{(x+1)(x+3)}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^{-x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(e^x f(x)-2\right)dx=-\frac{2}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.