Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați media geometrică a numerelor $x=\log_6 8+\log_6 27$ și $y=\sqrt{2^2\cdot 3^3+6^2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+a$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2-x^2}=7^{2x-1}$.

5p **4.** Arătați că produsul numerelor A_5^2, C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,\ a+1)$, $B(2,-3)$ și $C(3,\ 1-a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6**. Determinați raza cercului înscris în triunghiul MNP, dreptunghic în N, știind că $MN=12$ și $NP=16$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ 2 & 4 & -a\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=1\\ 2x+4y-az=1\\ x+ay-z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) astfel încât $x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{3}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3-27}$.

5p **a)** Arătați că $2021*(-2021)=-3$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+27}$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+3}{x^6+7}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x^2\left(x^3-1\right)\left(x^3+7\right)}{\left(x^6+7\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $|f(x)-f(y)|\le\frac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}f(x)}{2x+1}\,dx=e-1$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{e-1}{2e^2}$.