**Examenul național de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Testul 7**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinați numărul elementelor mulțimii $M=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\, 2n+1<10\right\}$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-10x+m$, unde $m$ este număr real. Determinați numărul real $m$ pentru care vârful parabolei asociate funcției $f$ este situat pe axa $Ox$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x+\sqrt{x-5}=7$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să **nu** fie multiplu de $5$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(-1,3)$. Determinați coordonatele punctului $C$ astfel încât $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic $ABC$ cu $AB=4$, $AC=5$ și aria egală cu $6$. Calculați cosinusul unghiului $A$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a+1\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(a+1)y+az=6a+3\\ x+y+(a+1)z=4a+7\\ 2x+ay+z=2a+6\end{cases}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(a))=2\left(a^2+1\right)$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care $A(a)\cdot A(0)=A(0)\cdot A(a)$.

**5p** **c)** Demonstrați că, dacă $(x_0,y_0,z_0)$ este soluția sistemului de ecuații, atunci $x_0$, $y_0$ și $z_0$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

**2.** Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\dfrac{2(x+y)}{xy+2}$.

**5p** **a)** Arătați că $x*0=x$, pentru orice $x\in M$.

**5p** **b)** Arătați că $x*y<2$, pentru orice $x,\ y\in[1,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinați perechile $(m,n)$ de numere naturale nenule pentru care $m*n$ este număr natural.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

**5p** **c)** Demonstrați că graficul funcției $f$ intersectează orice dreaptă paralelă cu axa $Ox$ în cel mult un punct.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+1$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2$.

**5p** **b)** Calculați $\int_0^1 x^2\left(f\left(x\right)\right)^3 dx$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x \ln\left(f\left(t\right)\right)dt = +\infty$.