Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow r = 3$	**2p**
	$a_{2021} = a_1 + 2020r = 6062$	**3p**
2.	$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = -x + 3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 2$ și $y = 1$	**2p**
3.	$3^{\frac{x+2}{2}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2} = 3$	**3p**
	$x = 4$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A care sunt divizori ai numărului 48 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 8, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(m-4) + 2m = 4m - 8$, unde m este număr real	**3p**
	$4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$	**2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 9 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 63$, deci $BC = 3\sqrt{7}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 3\sqrt{7} + 9 = 3(\sqrt{7} + 3)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -4 + 1 + (-1) - (-2) - (-1) - 2 = -3$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6a^2 - a + 2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$	**3p**
c)	Cum a este număr întreg, obținem că $\det(A(a)) \neq 0$, deci $(1, y_0, z_0)$ este unica soluție a sistemului de ecuații	**2p**
	$1 = \frac{3a}{-6a^2 - a + 2} \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0$ și, cum a este număr întreg, obținem $a = -1$	**3p**
2.a)	$x \circ 0 = x + 5 \cdot x \cdot 0 + 0 = x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0 \circ x = 0 + 5 \cdot 0 \cdot x + x = x$, pentru orice număr real x, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

b)	$x\circ y=5xy+x+y+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=5x\left(y+\frac{1}{5}\right)+\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}=$	**3p**
	$=\left(y+\frac{1}{5}\right)(5x+1)-\frac{1}{5}=5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x\circ\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5}$ și $\left(-\frac{1}{5}\right)\circ y=-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$q=\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\circ\left(-\frac{1}{3}\right)\circ\left(-\frac{1}{4}\right)\right)\circ\left(-\frac{1}{5}\right)\circ\left(-\frac{1}{6}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2021}\right)=\left(-\frac{1}{5}\right)\circ\left(\left(-\frac{1}{6}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2021}\right)\right)=-\frac{1}{5}$, deci $[q]=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x+1)'\cdot\ln x+(x+1)\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=1\cdot\ln x+(x+1)\cdot\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(1)=2$, $f(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2x-2$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este convexă pe $[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$g(x)=x^3+1$, $x\in\mathbb{R}$, deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{x^4}{4}+x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $G(0)=2021$, obținem $c=2021$, deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{x^4}{4}+x+2021$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\frac{1}{x^2+1}\leq\frac{x^n+1}{x^2+1}\leq\frac{x^2+1}{x^2+1}$, pentru orice $x\in[0,1]$ și pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, deci $\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1 1dx$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**
	$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=\frac{\pi}{4}$ și $\int_0^1 1dx=x\Big\vert_0^1=1\Rightarrow\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**