**Examenul de bacalaureat național 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Testul 8**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $q=2$, unde $q$ este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ | **2p** |
| | $b_1=1$, deci $b_1+b_2+b_3=7$ | **3p** |
| **2.** | $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+3=0$ | **2p** |
| | Cum $\Delta>0$, graficul funcţiei $f$ intersectează axa $Ox$ în două puncte distincte pentru care produsul absciselor este egal cu $x_1x_2=\frac{3}{1}=3$ | **3p** |
| **3.** | $4(x+2)=(1-x)^2 \Rightarrow x^2-6x-7=0$ | **3p** |
| | $x=-1$, care convine; $x=7$, care nu convine | **2p** |
| **4.** | Mulţimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile | **2p** |
| | Cifra sutelor poate fi aleasă în 4 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifrele zecilor şi unităţilor se pot alege în câte 5 moduri, deci există $4\cdot 5\cdot 5=100$ de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$ | **1p** |
| **5.** | $\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+(a+2)\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}-3\vec{j}$ | **2p** |
| | $\frac{a}{-2}=\frac{a+2}{-3} \Leftrightarrow a=4$ | **3p** |
| **6.** | $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=$ | **3p** |
| | $=2\sin x\cos\frac{\pi}{3}=2\sin x\cdot\frac{1}{2}=\sin x$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det A(0)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=0\cdot 3-1\cdot 2=-2$ | **3p** |
| **b)** | $\det A(a)=\begin{vmatrix}a & a+1\\ a+2 & a+3\end{vmatrix}=a^2+3a-a^2-3a-2=-2$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| | $\det A(a)\neq 0 \Rightarrow A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| **c)** | $(A(a))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{a+3}{2} & \frac{a+1}{2}\\ \frac{a+2}{2} & -\frac{a}{2}\end{pmatrix}$, pentru orice număr întreg $a$ | **2p** |
| | $X=(A(a))^{-1}A(b)=\begin{pmatrix}a-b+1 & a-b\\ b-a & b-a+1\end{pmatrix}$ și, cum $a$ şi $b$ sunt numere întregi, obținem că $X$ are toate elementele numere întregi | **3p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $a = 2 \circ 4 = \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} =$ | **2p** |
| | $= 1 + 4 = 5$, care este număr întreg | **3p** |
| **b)** | $x \circ y = \frac{2x^2 + 2y^2}{xy}$, pentru orice $x, y \in A$ | **2p** |
| | $x \circ y - 4 = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4xy}{xy} = \frac{2(x-y)^2}{xy} \geq 0$, deci $x \circ y \geq 4$, pentru orice $x, y \in A$ | **3p** |
| **c)** | Dacă legea de compoziție „$\circ$” ar admite element neutru, atunci ar exista $e \in A$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, pentru orice $x \in A \Rightarrow e \circ e = e$, de unde obținem $e = \frac{2e}{e} + \frac{2e}{e}$, deci $e = 4$ | **3p** |
| | Cum $2 \circ 4 \neq 2$, obținem că $e = 4$ nu convine, deci legea de compoziție „$\circ$” nu admite element neutru | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} =$ | **2p** |
| | $= \frac{-x^2 - 2x - 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2 (x+1)^2}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$ | **3p** |
| **b)** | Graficul funcției $f$ intersectează axa $Oy$ în punctul $A(0, f(0))$, $f(0) = -2$ și $f'(0) = 0$ | **3p** |
| | Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -2$ | **2p** |
| **c)** | $\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$ | **2p** |
| | $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$ | **3p** |
| **2.a)** | $\int_0^2 (x+4) f(x)\,dx = \int_0^2 (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 2x\Big|_0^2 =$ | **3p** |
| | $= 2 - 0 + 4 - 0 = 6$ | **2p** |
| **b)** | $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+4}\right) dx = \left(x - 2\ln(x+4)\right)\Big|_0^1 =$ | **3p** |
| | $= 1 - 2\ln 5 + 2\ln 4 = 1 - 2\ln\frac{5}{4}$ | **2p** |
| **c)** | $\frac{x+2}{x+4} \leq 1$ și $e^{-x} > 0$, deci $f(x)e^{-x} \leq e^{-x}$, pentru orice $x \in [0, n]$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **2p** |
| | $\int_0^n f(x)e^{-x}\,dx \leq \int_0^n e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^n = 1 - e^{-n} < 1$, pentru orice număr natural nenul $n$ | **3p** |