Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2=2$ și $b_3=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+3$. Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției f intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x+2}=1-x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-1,0)$ şi $C(a,a+2)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătaţi că $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Arătaţi că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere întregi și $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a)\cdot X=A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.

2. Pe mulţimea $A=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziţie $x\circ y=\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că numărul $a=2\circ 4$ este întreg.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y\geq 4$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul intersectează axa Oy.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x+1)}$.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+4)f(x)dx=6$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^n f(x)e^{-x}dx<1$, pentru orice număr natural nenul n.