**Examenul naţional de bacalaureat 2021**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Testul 9**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=5$ şi $a_5=11$.

**5p** **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$. Determinaţi numărul real $a$ știind că $f(a)=f(a+1)$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-x+13}=x+1$.

**5p** **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât $3$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(2,4)$, $B(-1,1)$ şi $C(3,a)$, unde $a$ este număr real. Determinaţi numărul real $a$ pentru care dreptele $OC$ și $AB$ sunt perpendiculare.

**5p** **6.** Arătaţi că, pentru orice număr real $x$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

**5p** **b)** Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale $x$ şi $y$.

**5p** **c)** Determinaţi perechile de numere întregi $(m,n)$ pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.

**2.** Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+2ay$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $1\circ 0=1$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **b)** Determinaţi numărul real $a$, știind că $x\circ 1>4$ dacă și numai dacă $x\in(3,+\infty)$.

**5p** **c)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă dacă şi numai dacă $a=\frac{1}{2}$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=1$, pentru orice număr real $x$.

**5p** **b)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x$ este tangentă la graficul funcţiei $f$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^{\pi} f(x)dx=2$.

**5p** **b)** Calculaţi $\int_0^{\pi} xf(x)dx$.

**5p** **c)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1 f^2(x)dx$.