

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(z_1 + i)(z_2 - 1) = (1 - 2i + i)(2 + i - 1) = (1 - i)(1 + i) =$ $= 1 - i^2 = 2$	2p 3p
2.	$\Delta < 0$ și, cum $\Delta = 16 - 4m$, obținem $16 - 4m < 0$ $m \in (4, +\infty)$	3p 2p
3.	$1 + \log_2(x - 2) = \log_2 x$, deci $\log_2 \frac{x}{x-2} = 1$, de unde obținem $\frac{x}{x-2} = 2$ $x = 4$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numărul n din mulțimea A are exact doi multipli în mulțimea A dacă $2n \leq 99 < 3n$, de unde obținem că numerele din mulțimea A care au exact doi multipli în mulțimea A sunt 34, 35, 36, ..., 49, deci sunt 16 cazuri favorabile și $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$	2p 3p
5.	$P(0,1)$, unde P este mijlocul segmentului AM Segmentele AM și BN au același mijloc, de unde obținem $N(-3,1)$	2p 3p
6.	$A + B = \pi - C$, deci $\sin C + \cos C = 1$ $\sin^2 C + 2\sin C \cos C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin 2C = 0$ și, cum $C \in (0, \pi)$, obținem $C = \frac{\pi}{2}$, deci triunghiul ABC este dreptunghic	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 =$ $= 1 + 6 - 3 - 1 + 3 - 6 = 0$	3p 2p
b)	$B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a	2p 3p

c)	$\det(A(a)) = 0$; cum $\det(A(a)) = -a^2 + 3a - 2$, obținem $a = 1$, pentru care sistemul este incompatibil, deci nu convine, sau $a = 2$, pentru care sistemul are o infinitate de soluții Dacă $a = 2$, soluția sistemului este $(x_0, y_0, z_0) = (\alpha - 1, -\alpha + 1, \alpha)$ și, cum α este număr real, obținem $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 = (\alpha - 1)(-\alpha + 1) + \alpha(-\alpha + 1) + \alpha(\alpha - 1) = -(\alpha - 1)^2 \leq 0$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale	2p 3p
2.a)	$(-1) * 2 = \frac{-1+2}{4 \cdot -1 \cdot 2 + 1} =$ $= \frac{1}{4 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{9}$	3p 2p
b)	$z * 0 = \frac{z+0}{4 \cdot z \cdot 0 + 1} = z$, pentru orice număr complex z $0 * z = \frac{0+z}{4 \cdot 0 \cdot z + 1} = z$, pentru orice număr complex z , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p 3p
c)	$z * z = \frac{2z}{4 \cdot z ^2 + 1}$, pentru orice număr complex z $\left \frac{2z}{4 \cdot z ^2 + 1} \right = z $ și z este număr complex nenul, deci $4 \cdot z ^2 + 1 = 2$, de unde obținem $ z = \frac{1}{2}$ și, de exemplu, numerele distincte nenule $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ și $\frac{i}{2}$ verifică egalitatea dată	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16}} \cdot x - \sqrt{x^4+16}}{x^2} = \frac{2x^4 - x^4 - 16}{x^2 \sqrt{x^4+16}} =$ $= \frac{x^4 - 16}{x^2 \sqrt{x^4+16}} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4+16}}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+16}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{16}{x^4}} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+16} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x(\sqrt{x^4+16} + x^2)} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 2)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$ $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = 2f(x)$, deci g este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ și g este strict crescătoare pe $(2, +\infty)$ și, cum g este continuă, $g(2) = 4\sqrt{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, obținem că ecuația $g(x) = m$ are exact două soluții pentru $m \in (4\sqrt{2}, +\infty)$	2p 3p

2.a)	$\int_0^3 e^x f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 = 12$	3p
b)	G este primitivă a funcției $g \Rightarrow G'(x) = g(x)$, deci $G''(x) = g'(x) =$ $= \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția G este convexă	2p 3p
c)	$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + x - x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)' \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx =$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3} - 2\sqrt{x^2 + 1} \right) \Big _0^1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$ $\frac{2 - \sqrt{2}}{3} = \frac{a - \sqrt{2}}{3}, \text{ de unde obținem } a = 2$	3p 2p