Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 2 + i$. Arătați că $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 2\log_2 \sqrt{x-2} = \log_2 x$.

5p **4.** Se consideră mulțimea A, a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ și $M(2,4)$. Determinați coordonatele punctului N, știind că patrulaterul $ABMN$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, în care $\sin(A+B) + \cos C = 1$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 0$.

5p **b)** Arătați că $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a, unde $B(a) = A(a) - A(0)$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \leq 0$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{4 \cdot |z_1 z_2| + 1}$.

5p **a)** Arătați că $(-1) * 2 = \dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $|z * z| = |z|$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ are exact două soluții.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă G a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ este convexă.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.