Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2\left(\log_5 10-\log_5 2\right)+\log_5 25=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$. Determinați numărul real m pentru care $f(2+m)=2-m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x\cdot 2^{1-x}=2^7$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6\}$. Determinați câte dintre numerele naturale de trei cifre distincte, care se pot forma cu cifre din mulțimea A, sunt divizibile cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,0)$ și $C(4,6)$. Determinați ecuația dreptei d ce trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta BC.

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\operatorname{tg}x\cdot\left(\cos\frac{3x}{4}\right)^2-\cos\frac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & -2\\ 0 & a & 1\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}ax+y-2z=4\\ ay+z=1\\ 2x+4y+z=4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=3$.

5p **b)** Arătați că sistemul de ecuații are soluție unică, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului de ecuații verifică inegalitatea $y_0\geq 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4-\frac{1}{2}(x-4)(y-4)$.

5p **a)** Arătați că $6*7=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*(x+4)=6$.

5p **c)** Determinați tripletele (m,n,p) de numere naturale, cu $m<n<p$, pentru care $m*n*p=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-5)\sqrt{x^2+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2x^2-5x+2}{\sqrt{x^2+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-5x}{f(x)}\right)^x=1$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^3+1+\ln^2 x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln^2 x\right)dx=31$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)-8x^3-1}{x}dx=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_1^{e^2}\frac{x(\ln x)^n}{f(x)-8x^3}dx$. Demonstrați că $I_{n+2}+I_n\le 2^{n-1}\left(e^4-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n.